# 人工知能―AI の基礎から知的探索へ：演習問題解答例

第 3 章　論理と推論

演習問題 3.1 論理式 P∧Q⇒R の全ての解釈は、表 3.3 に示されている。これと同じように、P∨Q（論理和）と P∧Q（論理積）の全ての解釈を真理値表で示せ。

解答

$P \wedge Q$ と $P \vee Q$ の真理値表

| $P$ | $Q$ | $P \wedge Q$ | $P \vee Q$ |
|---|---|---|---|
| $F$ | $F$ | $F$ | $F$ |
| $F$ | $T$ | $F$ | $T$ |
| $T$ | $F$ | $F$ | $T$ |
| $T$ | $T$ | $T$ | $T$ |

演習問題 3.2　命題論理の法則を利用して、論理式$(P \Rightarrow Q \wedge \neg Q) \Rightarrow \neg P$ が恒真式であることを証明せよ。

解答

$(P \Rightarrow Q \wedge \neg Q) \Rightarrow \neg P$

$= ((\neg P \vee Q) \wedge \neg Q) \Rightarrow \neg P$　含意の定義より

$= \neg((\neg P \vee Q) \wedge \neg Q) \vee \neg P$　含意の定義より

$= \neg(\neg P \vee Q) \vee \neg\neg Q \vee \neg P$　ドモルガンの法則より

$= (\neg\neg P \wedge \neg Q) \vee \neg\neg Q \vee \neg P$　ドモルガンの法則より

$= (P \wedge \neg Q) \vee \neg\neg Q \vee \neg P$　2 重否定の法則より

$= (P \wedge \neg Q) \vee Q \vee \neg P$　2 重否定の法則より

$= ((P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee Q)) \vee \neg P$　分配律より

$= ((P \vee Q) \wedge T) \vee \neg P$　補元律より

$= ((P \vee Q)) \vee \neg P$　吸収律より

$= P \vee Q \vee \neg P$　結合律より

$= P \vee \neg P \vee Q$　交換律より

$= T \vee Q$　補元律より

$= T$　吸収律より

追加説明：各ステップにおいて、使用される法則によって証明方法も異なってくる。例えば、左側優先と言うルールにしたがう場合、第 2 ステップにおいて、分配律を使用することができる。その次に補元律と吸収律を使用することによって左側の「部分」式を簡略化することができる。いずれにせよ、「探索」をもとに自動証明を行うためには、法則の使用、式の変形などに、順番を決める必要がある。

演習問題 3.3　$Q$ が$\{P \Rightarrow Q, P\}$の論理的帰結であることを示せ。

解答
推論の健全性定理により、$Q$ が$\{P \Rightarrow Q, P\}$の論理的帰結であることを示すために、$(P \Rightarrow Q \wedge P) \Rightarrow Q$ が恒真式であることを証明すればよい。これは、以下のように証明できる。

$$
\begin{aligned}
&(P \Rightarrow Q \wedge P) \Rightarrow Q \\
&= ((\neg P \vee Q) \wedge P) \Rightarrow Q \\
&= ((\neg P \wedge P) \vee (Q \wedge P)) \Rightarrow Q \\
&= (F \vee (Q \wedge P)) \Rightarrow Q \\
&= (Q \wedge P) \Rightarrow Q \\
&= \neg (Q \wedge P) \vee Q \\
&= \neg Q \vee \neg P \vee Q \\
&= \neg Q \vee Q \vee \neg P \\
&= T \vee \neg P \\
&= T
\end{aligned}
$$

以上の各ステップにおいて、どの法則を使用したのか、確認してみてください。

演習問題 3.4

1） Taro と Jiro が兄弟であることを述語記号で表せ。

2） Jiro の兄弟を求めることを関数記号で表せ。

解答

1) Brother(Taro, Jiro)

Taro と Jiro が兄弟であるとき、Brother(Taro, Jiro)が *T* となる。

2) brother(Jiro)

Taro が Jiro の兄弟であるとき、brother(Jiro)の返す値は Taro である。

表 3.9　表 3.8 の節集合に対応するホーン節の集合

| | |
|---|---|
| 1 | $M_1(x_1) \vee \neg H(x_1)$ |
| 2 | $M_1(x_2) \vee \neg B_1(x_2)$ |
| 3 | $C(x_3) \vee \neg M_1(x_3) \vee \neg E(x_3)$ |
| 4 | $C(x_4) \vee \neg M_1(x_4) \vee \neg S_1(x_4) \vee \neg S_2(x_4)$ |
| 5 | $L(x_5) \vee \neg C(x_5) \vee \neg B_2(x_5) \vee \neg B_3(x_5)$ |
| 6 | $F(x_6) \vee \neg C(x_6) \vee \neg B_2(x_6) \vee \neg M_2(x_6)$ |
| 7 | $H(a)$ |
| 8 | $B_2(a)$ |
| 9 | $B_3(a)$ |
| 10 | $E(a)$ |

演習問題 3.5　表 3.9 は、表 3.8 の節集合をホーン節集合に書き直したものである。全ての節には、肯定リテラルは一つだけ含まれ、節の左端に置かれている。ホーン節集合をもとに、SLD 戦略で $L(a)$を証明せよ（ヒント：反駁証明を利用すること）。

解答

$L(a)$の妥当性を証明するためには、¬$L(a)$を節集合に入れ、推論によって矛盾が導かれるかどうかを調べればよい。推論は以下のようになる。

親節 1 ：$\neg L(a)$　（追加された節）
親節 2 ：$L(x_5) \vee \neg C(x_5) \vee \neg B_2(x_5) \vee \neg B_3(x_5)$　（5 番目の節）
単一化：$x_5=a$
導出節：$\neg C(a) \vee \neg B_2(a) \vee \neg B_3(a)$

親節 1 ：上の導出節と同じ
親節 2 ：$C(x_3) \vee \neg M_1(x_3) \vee \neg E(x_3)$　（3 番目の節）
単一化：$x_3=a$
導出節：$\neg B_2(a) \vee \neg B_3(a) \vee \neg M_1(a) \vee \neg E(a)$

親節 1 ：上の導出節と同じ
親節 2 ：$B_2(a)$　（8 番目の節）
単一化：必要なし
導出節：$\neg B_3(a) \vee \neg M_1(a) \vee \neg E(a)$

親節 1 ：上の導出節と同じ

親節２：$B_3(a)$　（9 番目の節）
単一化：必要なし
導出節：$\neg M_1(a) \vee \neg E(a)$

親節１：上の導出節と同じ
親節２：$M_1(x_1) \vee \neg H(x_1)$　（1 番目の節）
単一化：$x_1=a$
導出節：$\neg E(a) \vee \neg H(a)$

親節１：上の導出節と同じ
親節２：$E(a)$　（10 番目の節）
単一化：必要なし
導出節：$\neg H(a)$

親節１：上の導出節と同じ
親節２：$H(a)$　（７番目の節）
単一化：必要なし
導出節：$\Phi$

矛盾が導出されたので、$L(a)$を否定することはできず、$L(a)$が必ず成立する。

追加説明：例題 3.11 と違うのが、各ステップにおいて、親節 1 の先頭にある否定リテラルと（単一化によって）照合できる節を節集合から求める点である。これによって、自動証明の効率を高めることができる。

演習問題 3.6：表 3.9 のホーン節の集合を、Prolog プログラムに直せ。また、読者各自の実行環境にあるインタプリタを利用して、作ったプログラムの動作を確認せよ。

解答

Prolog のプログラムにおいて、小文字が定数、大文字が変数である約束があるので、表 3.9 の節集合をプログラムの形に直すと、以下のようになる。ただし、一番下の 4 行は、もう一つの例である。

```
m1(X1) :- h(X1).
m1(X2) :- b1(X2).
c(X3) :- m1(X3), e(X3).
c(X4) :- m1(X4), s1(X4), s2(X4).
l(X5) :- c(X5), b2(X5), b3(X5).
f(X6) :- c(X6), b2(X6), m2(X6).
h(a).
b2(a).
b3(a).
e(a).

b1(b).
e(b).
b2(b).
m2(b).
```

このプログラムを例えば test.pl にセーブしてから実行すると、l(a)と f(b)が成立することを確認することができる。また、

?- m1(X).

を入力すると、a と b のどちらも正解として出力することができる。