RUPC2019 Day2
F: Equilateral Triangle

原案shot
解説：shot

概要

N個の頂点からなる凸多角形が与えられる。

その凸多角形の全ての頂点を含む正三角形を考えるとき、その正三角形の一辺の長さの最小値を求めよ。

3 <= N <= 10000

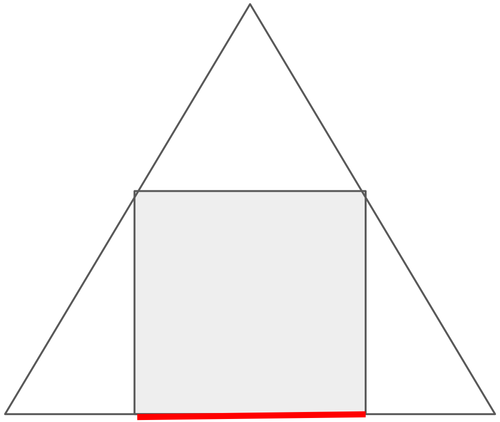
考察

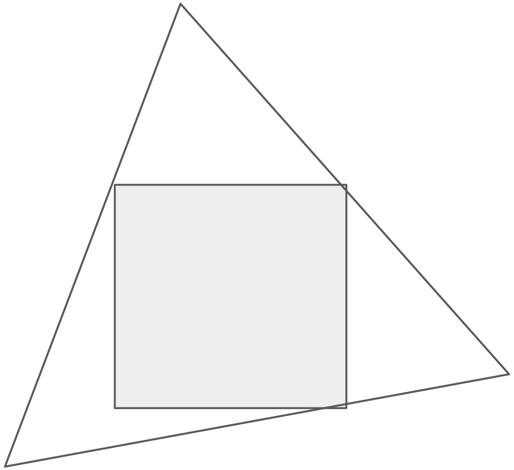
条件を満たす最小の辺を持つ正三角形のそれぞれの辺は、必ず何かしらの多角形の頂点に接している。（接していないならそれより小さい辺を持つ三角形が考えられる）

さらに考察

条件を満たす正三角形の辺の内、少なくとも１つは多角形の辺を含んでいる。

イメージ





証明

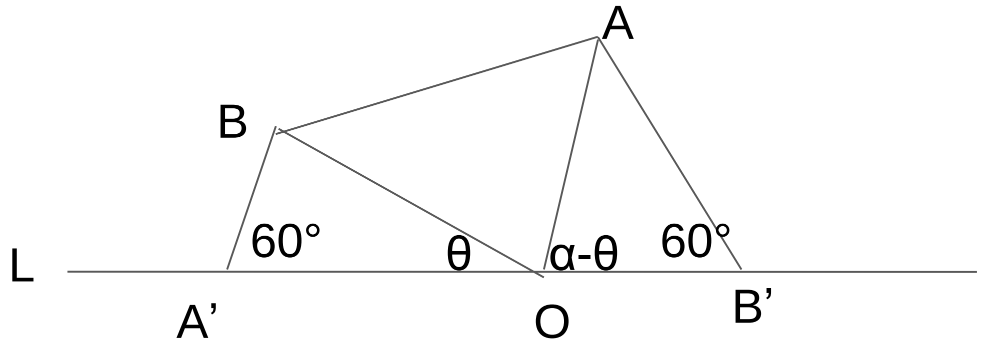
三角形OABと直線Lに対して、A'、B'を図のように定義する。

また、t = |**A’B’**|とする。

命題

0 <= l <= r <= α を満たす任意の実数 l, r に対して、

argmin(t) = l or r を満たす。



証明

$\Leftarrow$ t は [0, α] で極小値をとらない。

$t = |\mathbf{OA}|\cos(\alpha-\theta) + (1/\sqrt{3})|\mathbf{OA}|\sin(\alpha-\theta) + |\mathbf{OB}|\cos\theta + (1/\sqrt{3})|\mathbf{OB}|\sin\theta$

$= (2/\sqrt{3})|\mathbf{OA}|\cos(\alpha-\theta-\pi/6) + (2/\sqrt{3})|\mathbf{OB}|\cos(\theta-\pi/6)$

$= (2/\sqrt{3})(|\mathbf{OA}|\cos(\alpha-\theta-\pi/6) + (2/\sqrt{3})|\mathbf{OB}|\cos(\theta-\pi/6))$

証明

適当な定数a, b, c, d, e, f を用いて

$t = a\cos b + c\cos d = e\cos f$

と表せる。

証明

ここで、α, θ を変数と考えて定義域を

$0 <= \theta <= \pi$

とすると、

$b \in [-(\frac{5}{6})\pi + \theta, \pi/6]$

$c = -\pi/6 + \theta$　より

証明

$f \in [\min(-(5/6)\pi + \theta, -(\pi/6) + \theta), \max(\pi/6, -(\pi/6) + \theta)]$

$0 <= \theta <= \pi$ だから

$f \in [-(5/6)\pi, (5/6)\pi]$

$e > 0$ だから, t は$[0, \alpha]$ で極小値をとらない。

実装方法

まず正三角形の辺に使う多角形の辺を１つ決める。（例えば、p0 と p1 を端点とする線分)

そしてその辺を使った時に接する多角形の頂点を求める。

使う一辺と接する多角形の頂点が分かれば、そこからその正三角形の長さを求めることができる。

実装方法

使う多角形の辺をずらしながら、その都度接する多角形の頂点を求め、最小の辺を更新していく。

これは一見 O(N^2) かかりそうだが、しゃくとり方の要領で O(N) でできる。

(三角関数や sqrt() を考慮すると O(NlogN) ?)

講評

- First Accepted:
  - rupc_beet_aitu (01:18:16)
- Success Rate: 11/23 (47.8%)

ジャッジ解

- beet C++ 5995 bytes
- c7c7 C++ 2171 bytes
- tubuann C++ 1781 bytes