D：トンネル

Gacho_0716

問題概要

横軸x、縦軸yのxy平面上にn個の長方形がある。

i番目の長方形は、高さh_i、幅1であり、頂点は点$(i-1,0)$、点$(i-1,h_i)$、点(i,h_i)、点$(i,0)$である。

あなたはn個の正の整数$y_1,y_2,\ldots y_n$を選び、以下のn回の操作を行う。

(1) 1回目の操作では、点$(0,1)$と点$(1,y_1)$を結ぶ線分を引く。

(2) i回目$(2\leq i\leq n)$の操作では、点$(i-1,y_{i-1})$と点(i,y_i)を結ぶ線分を引く。

問題概要

i回目の操作に対し、S_iを以下のように定める。

i回目の操作で引いた線分のx座標が小さい方の端点をA、x座標が大きい方の端点をBとする。

また、点$(i-1,0)$をC、点$(i-1,h_i)$をD、点(i,h_i)をE 、点$(i,0)$をFとする。

台形ABFCと長方形DEFCの非共通部分の面積をS_iとする。

$S=S_1+S_2+\cdots+S_n$を最小化するような$y_1,y_2,\ldots y_n$を求め、Sの最小値を出力せよ。

解法 - アルゴリズム

- 動的計画法

解法 - DPの定義

- dp[i][j] := i 番目までの線分を引いて、高さy_i を j にしたときの、面積の合計の最小値（ $S_1+S_2+...+S_i$ の最小値)

- dp[151][151]だと足りない → dp[151][301]とれば十分 (あとで説明)

解法 - i番目の線分L_iを引いたときの面積の計算方法

場合分けをする。点$(i-1,h_i)$をA、点(i,h_i)をBとおく。

- L_iが線分ABをまたぐ場合 → パターン1

  三角形が２個できる。

- L_iが線分ABをまたがない場合 → パターン2

  三角形(なくてもいい)と長方形(なくてもいい)を組み合わせたものができる。

解法 - パターン１の計算式

```
double Pattern1(int A, int B, int H){
  double x = 1.0 * abs( A - H ) / ( abs( A - H ) + abs( B - H ) );
  double y = 1.0 - x;
  return abs( A - H ) * x / 2.0 + abs( B - H ) * y / 2.0;
}
```

Aはi番目に引いた線分のx座標が小さい方の端点のy座標

Bはi番目に引いた線分のx座標が大きい方の端点のy座標

Hはi番目の長方形の高さ

解法 - パターン２の計算式

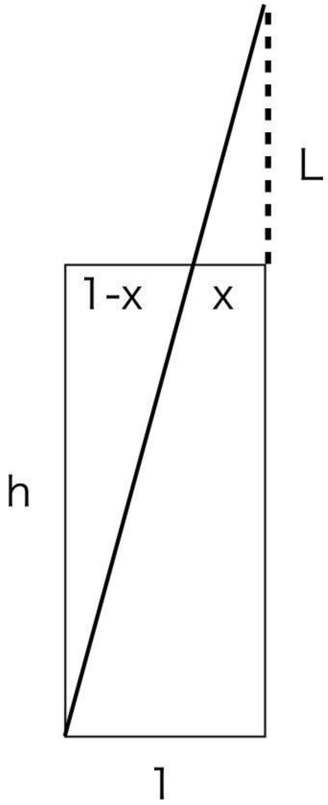
```
double Pattern2(int A, int B, int H){
  return min( abs( A - H ), abs( B - H ) ) + abs( A - B ) / 2.0;
}
```

Aはi番目に引いた線分のx座標が小さい方の端点のy座標

Bはi番目に引いた線分のx座標が大きい方の端点のy座標

Hはi番目の長方形の高さ

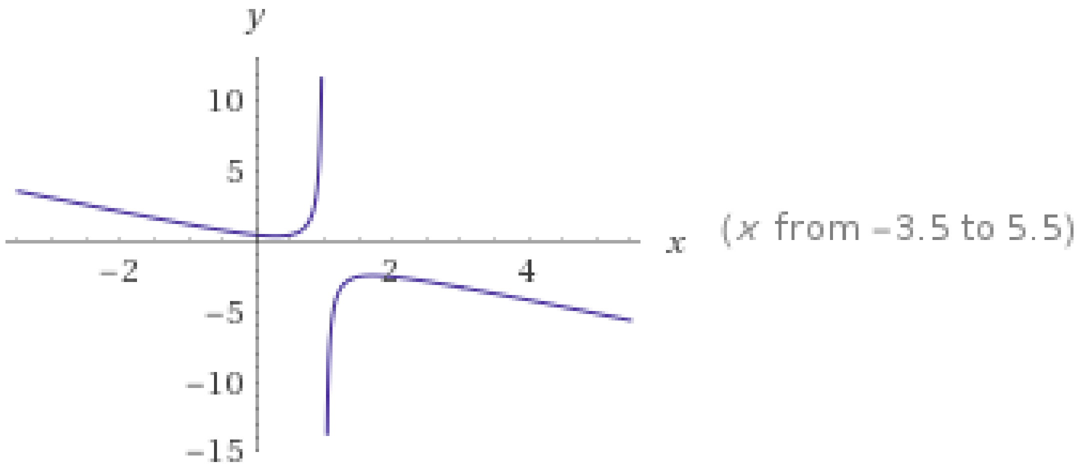
解法 - 配列のサイズについて



$L = hx / (1 - x)$

(面積の合計) $= y = hx^2 / (1 - x) - hx / (1 - x) + h / 2 (1 - x)$

解法 - 配列のサイズについて



x = 1 - 1 / √ 2 で
yは極小値をとる。

Local minimum:

$$\min\left\{\frac{x^2}{1-x} - \frac{x}{1-x} + \frac{1}{2-2x}\right\} = \sqrt{2} - 1 \text{ at } x = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

解法 - 配列のサイズについて

L = hx / (1 - x) の x には 1 - 1 / √ 2 を代入、h には最悪ケースである150を代入

L = 150 × 0.29289321881 / (1 - 0.29289321881)

= 62.1320343549

つまり、h + L = 150 + 62.1320343549 = 212.132034355 なので、

dp[151][301 (> 212.132...)]で十分である。

講評

- First Accepted:
  - Onsite: rupc_KU_NO_FA (55m 17s)
  - Online: rickytheta (32m 2s)

- Success Rate: 61.363636363% (27 / 44)

ジャッジ解

- beet C++ 1027Byte
- c7c7 C++ 1292Byte
- tubuann C++ 1592Byte