Combine two elements

立命館合宿 2018

Day2

Writer : shot

問題概要

N個のペア(a_i, b_i)と、非負整数A, Bが与えられる。

以下のような操作をたくさん行いたい。

・$|a_i - b_i| \leq A$ または $B \leq |a_i - b_i| \leq 2A$を満たす要素iを取り出し、削除する

・$|(a_i+a_j)-(b_i+b_j)| \leq A$ または $B \leq |(a_i+a_j)-(b_i+b_j)| \leq 2A$ を満たす要素iと要素j ($i \neq j$)の組を取り出し、削除する

最大の操作回数は？

考察

操作回数を最大にしたいので、組み合わせずに単体で削除できるならそのまま削除してしまった方が良い。

そのあとは最大マッチング問題になる。

ぱっと見、一般マッチングっぽいが二部マッチングで解くことができる。

どう考えれば、二部マッチングで解けるかを解説していく。

簡単な問題

その前に、少し簡単な問題を考える。

N個のペア(a_i, b_i)と、非負整数Aが与えられる。

以下のような操作をたくさん行いたい。

・$|a_i - b_i| \leq A$ を満たす要素iを取り出し、削除する

・$|(a_i + a_j) - (b_i + b_j)| \leq A$ を満たす要素iと要素j ($i \neq j$)の組を取り出し、削除する

最大の操作回数は？

簡単な問題の解法

この問題は絶対値を小さくすることだけを考えればいい。

そのため、ai - bi > 0 を満たすペア は ai - bi < 0 を満たすペア としか組み合わせられ得ない。

よって二部グラフを構築でき、二部マッチングで解くことができる。

実はもとの問題もこれと全く同じ解法で解ける。

なぜか

なぜなら、もとの問題も絶対値を小さくすることだけ考えれば良いからである。

もとの問題は

$|(a_i+a_j)-(b_i+b_j)|\le A$ または $B\le|(a_i+a_j)-(b_i+b_j)|\le 2A$

という制約を満たすようにペアを組み合わせる必要がある。

ペアを組み合わせ絶対値を大きくし、$B\le|(a_i+a_j)-(b_i+b_j)|\le 2A$ にするということも考えられそうだが、これは $|(a_i+a_j)-(b_i+b_j)|\le A$ を満たすペアを削除したあとではありえない操作である。

結論

よってこの問題も絶対値を小さくすることだけ考えればいいことが分かり、二部マッチングで解けることも分かった。

解法をまとめると

1 $|a_i - b_i| \leq A$ または $B \leq |a_i - b_i| \leq 2A$ を満たす要素i をあらかじめ削除

2 ai - bi > 0 を満たす頂点集合 と ai - bi < 0 を満たす頂点集合 からなる二部グラフを構築、$|(a_i+a_j)-(b_i+b_j)| \leq A$ または $B \leq |(a_i+a_j)-(b_i+b_j)| \leq 2A$ を満たすように辺を張る

3 流す

オーダーはフローのアルゴリズムにもよりますが、どれを選択しても余裕をもって通せると思います。(Dinicの場合 O(N^3))

ジャッジ解

uku : 77行

shot : 81行

beet : 98行

c7c7 : 113行

haji : 134行

(全員c++)